CX7611

Banque commune École Polytechnique - InterENS

PSI

Session 2017

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet comporte trois parties. Il est conseillé de les traiter dans l'ordre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour toute fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ème de f sur cet intervalle (quand cette dérivée n-ème existe).
  Ainsi $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc. On convient que $f^{(0)} = f$.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times \cdots \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\det(A)$. Sa transposée est notée ${}^tA = [a_{j,i}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Lorsque $A = [a_{1,1}] \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ on identifie A au réel $a_{1,1}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales associées seront notés identiquement. Ainsi, si par exemple $P \in \mathbb{R}[X]$ désigne un polynôme, alors la fonction polynomiale associée sera aussi notée P.
- Etant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E, on note 0_E l'élément nul de E, et on note Id_E l'application identité de E dans lui même. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
  Si $L \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $n \geqslant 2$ un entier naturel, on note L^n l'application composée de L avec lui même n fois : $L^n = L \circ L \circ \cdots \circ L$ (n fois). Par convention $L^0 = \mathrm{Id}_E$ et $L^1 = L$. Le noyau et l'image de L seront notés respectivement $\mathrm{Ker}\, L$ et $\mathrm{Im}\, L$.
  Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on note $F_1 + F_2$ la somme de ces deux sous-espaces. On écrira $F_1 \oplus F_2$ pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus, E est muni d'un produit scalaire, on écrira $F_1 \oplus^{\perp} F_2$ pour signifier que la somme est orthogonale, c'est-à-dire que F_1 et F_2 sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un espace sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^{\perp}$. On notera $\dim(F)$ la dimension de F.

Partie I

Soit $m \geqslant 2$ un entier naturel et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2m+1$. Cet espace est muni d'un produit scalaire $\langle . \,|\, . \rangle$. Soient T et M deux endomorphismes de E vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) $T^{2m} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $T^{2m+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(H2) $M^2 = \mathrm{Id}_E$.

(H3) $\forall (v,w) \in E^2$, $\langle M(v) \,|\, w \rangle = \langle v \,|\, M(w) \rangle$.

(H4) $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On pose dans la suite

$$F^+ = \mathrm{Ker}\,(M - \mathrm{Id}_E),\ F^- = \mathrm{Ker}\,(M + \mathrm{Id}_E).$$

On considère l'application S de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (v,w) \in E^2,\ S(v,w) = \langle v \,|\, T(w) \rangle + \langle T(v) \,|\, w \rangle,$$

et on note G l'ensemble des éléments $u \in E$ vérifiant les deux propriétés :

(a) $u \in \mathrm{Im}\, T$,

(b) $\forall v \in E,\ S(u,v) = 0$.

1. Pour tout vecteur $v \in E$, on pose

$$v^+ = v + M(v),\ v^- = v - M(v).$$

   (a) Montrer que : $\forall v \in E$, $v^+ \in F^+$ et $v^- \in F^-$.

   (b) Montrer que $E = F^+ \oplus^\perp F^-$.

   (c) Montrer que : $\forall v \in F^+$, $T(v) \in F^-$ et que $\forall v \in F^-$, $T(v) \in F^+$.
   En déduire que F^+ et F^- sont stables par T^2.

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, ..., 2m\}$, $\mathrm{Im}\,(T^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(T^k)$ et $\mathrm{Im}\,(T^{k+1}) \neq \mathrm{Im}\,(T^k)$.

3. En déduire que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2m+1\}$, on a

$$\dim(\mathrm{Im}\, T^k) = 2m + 1 - k,\ \dim(\mathrm{Ker}\, T^k) = k.$$

4. En déduire aussi que $\mathrm{Im}\, T^k = \mathrm{Ker}\, T^{2m+1-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2m+1$.

5. Soit $k \in \{1, 2, ..., 2m+1\}$ et $z \in (\mathrm{Im}\, T^k)^\perp \cap (\mathrm{Im}\, T^{k-1})$ tel que $z \neq 0_E$. Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur z, montrer que $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$.

6. Montrer que pour tout nombre réel α, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$ est bijectif et que

$$(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k},$$

   où $(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$ désigne l'endomorphisme inverse de $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$.
7. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G \cap \operatorname{Ker} T = \{0_E\}$.
8. En déduire que l'application $(v, w) \in G \times G \mapsto \langle T(v) \,|\, T(w) \rangle$ est un produit scalaire sur G.
9. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $M \circ T^k = (-1)^k \, T^k \circ M$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} T^k$ et $\operatorname{Ker} T^k$ sont stables par M.
10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i) $\operatorname{Ker} T \subset F^+$ (ii) $\operatorname{Ker} T \subset F^-$.
11. On suppose ici que $\operatorname{Ker} T \subset F^+$.
   (a) Montrer que : $\forall z \in F^-$, $T^{2m}(z) = 0_E$.
   (b) Montrer que $(\operatorname{Im} T)^\perp \subset F^+$ et que $(\operatorname{Im} T^2)^\perp \cap \operatorname{Im} T \subset F^-$.
   (c) Soit $z \in (\operatorname{Im} T)^\perp$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.
   (d) Soit $z \in (\operatorname{Im} T^2)^\perp \cap (\operatorname{Im} T)$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.
12. On dit désormais qu'un couple $(w_1, w_2) \in E \times E$ est une *paire caractérisante de* G si w_1 et w_2 vérifient les trois propriétés :
   (A) $w_1 \in F^+$, $T(w_1) \in G^\perp$ et $T(w_1) \neq 0_E$,
   (B) $w_2 \in F^-$, $T(w_2) \in G^\perp$ et $T(w_2) \neq 0_E$,
   (C) $w_i \in (\operatorname{Im} T^2)^\perp$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

   Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractérisante de G.
13. En déduire que $\dim(G) \leqslant 2m - 2$.
14. On suppose maintenant que G vérifie l'hypothèse suivante :

$$\textbf{(H5)}\ \dim(G) = 2m - 2.$$

   Montrer que si (w_1, w_2) est une paire caractérisante de G alors $(T(w_1), T(w_2))$ constitue une base de $G^\perp$.

Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses (H1) , (H2), (H3), (H4) et (H5) sont toutes satisfaites. Soit (w_1, w_2) une paire caractérisante de G (c'est-à-dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant, noté $(\mathscr{P}_\lambda)$:

$$\textit{Trouver } u \in G \textit{ tel que} : \quad \forall v \in G,\ \langle u \,|\, v\rangle - \lambda \langle T(u) \,|\, T(v)\rangle = 0 \qquad (\mathscr{P}_\lambda)$$

et on note H_λ l'ensemble des solutions u de ce problème. On montre facilement que H_λ est un sous-espace vectoriel de G.

15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (a) Montrer que si $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution $u \neq 0_E$, alors nécessairement $\lambda > 0$.
    (b) Soit $u \in G$. Montrer que u est solution de $(\mathscr{P}_\lambda)$ si et seulement si :

    $$(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp.$$

    En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :

    $$u = \alpha(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1} T(w_1) + \beta(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1} T(w_2).$$

    (c) Montrer que le problème $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si

    $$Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0,$$

    où pour $i \in \{1, 2\}$, Q_i est le polynôme

    $$Q_i(X) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \langle T^{2k+1}(w_i) \,|\, T(w_i)\rangle X^k.$$

    (d) Supposons que λ est racine réelle du polynôme produit $Q_1 Q_2$. Montrer que $\dim(H_\lambda) = 2$ si λ est racine commune de Q_1 et de Q_2, et $\dim(H_\lambda) = 1$ sinon.
    (e) Montrer que

    $$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) X^k, \text{ pour } \; i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

16. Soit $\mathscr{B} = (z_1, ..., z_\ell)$, où $\ell = 2m - 2$, une base de G. Pour tout élément u de G, on note U (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de u relativement à la base $\mathscr{B}$. On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant \ell}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant \ell}$ les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par

$$a_{ij} = \langle z_i \,|\, z_j \rangle,\ b_{ij} = \langle T(z_i) \,|\, T(z_j) \rangle \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant \ell.$$

(a) Soient u et v deux éléments de G. Montrer que

$$\langle u \,|\, v \rangle = {}^tUAV, \quad \langle T(u) \,|\, T(v) \rangle = {}^tUBV,$$

et en déduire que A et B sont inversibles.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'un élément $u \in G$ est solution de $(\mathscr{P}_\lambda)$ si et seulement si

$$(A - \lambda B)U = 0.$$

En déduire que $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si $\det(A - \lambda B) = 0$.

(c) On définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det B}.$$

Montrer que cette fonction ψ est indépendante du choix de la base $\mathscr{B}$.

(d) Justifier pourquoi on peut choisir la base $\mathscr{B}$ de sorte que $B = I_\ell$. En déduire que ψ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

(e) Montrer que le polynôme ψ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que ses racines sont soit simples soit doubles.

(f) Montrer que

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X).$$

(on justifiera pourquoi nécessairement $S(w_i, T^{2m-1}(w_i)) \neq 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$). En déduire que Q_1 et Q_2 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples.

PARTIE III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$, avec $m \geqslant 2$ un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Désormais les deux endomorphismes T et M de E seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X],\ T(P) = P' \text{ et } M(P) = P^\star,$$

où $P^\star(X) = P(-X)$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}.$$

17. Montrer que T et M vérifient bien les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4).
18. Quels sont les espaces F^+ et F^- dans ce cas ?
19. Montrer que
$$\forall (P, Q) \in E^2,\ S(P, Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1).$$
20. Déterminer le sous-espace G. L'hypothèse (H5) est-elle satisfaite ?
21. On définit pour tout entier naturel n le polynôme R_n comme suit
$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n,$$
et on pose désormais
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X).$$
Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quel est le degré du polynôme L_n ? Exprimer $M(L_n)$ en fonction de L_n.
   (b) Montrer que si $n \geqslant 1$ alors
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle L_n \mid P \rangle = 0.$$
   (c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a
   $$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k! 2^k}.$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel k, on a

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1).$$

22. Montrer que le couple (L_{2m}, L_{2m-1}) est une paire caractérisante de G.
23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le problème : *trouver* $P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$ *tel que*

$$\forall Q \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X],\ \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt - \lambda \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt = 0.$$

Montrer que ce problème admet une solution P non identiquement nulle si et seulement si λ est racine du polynôme

$$K(X) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1) X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1) X^k\right).$$

24. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X],\ \ \langle P \mid P \rangle \leqslant 4 \langle P' \mid P' \rangle,$$

avec inégalité stricte si P est non nul.

25. En déduire que les racines de K sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle $]0, 4[$.
26. Soit $(P_1, \cdots, P_{2m-2})$ une base quelconque de G. On considère les deux matrices carrées $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2m-2}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2m-2}$ définies par

$$a_{i,j} = \langle P_i \mid P_j \rangle,\ b_{i,j} = \langle P'_i \mid P'_j \rangle \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant 2m - 2.$$

Déterminer le rapport

$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$

en fonction de m.

FIN DE L'ÉNONCÉ