

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2013

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve: 4 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

REBONDS D'UNE GOUTTE D'EAU

Il est possible de réaliser par traitement chimique d'une plaque métallique une surface plane parfaitement hydrophobe : une goutte d'eau posée sur cette surface n'y est en contact qu'en un seul point et on constate qu'elle adopte une forme sphérique si elle est suffisamment petite (observation **O1**).

Lorsqu'on lâche une goutte sphérique de rayon $a_0 \approx 1,0$ mm sans vitesse initiale à une hauteur $h \approx 10$ cm au-dessus de la plaque supposée horizontale et qu'on filme avec une caméra rapide, on constate que la goutte reste au contact du plan hydrophobe pendant une durée τ de l'ordre de quelques millisecondes (observation **O2**). Pendant cette phase, la goutte s'aplatit puis s'arrondit avant de décoller.

Une fois qu'elle a décollé, la goutte qui a récupéré sa forme sphérique remonte jusqu'à une altitude maximale inférieure à h avant de retomber. Le processus se répète ensuite avec cinq à dix rebonds perceptibles (observation **O3**).

Le but du problème est de proposer des modèles simples tentant d'interpréter ces observations.

Toutes les définitions et données numériques utiles pour tout le problème sont rassemblées en fin d'énoncé. Dans tout le problème, *exprimer* ou *déterminer* une grandeur signifie en donner une expression littérale. En revanche *calculer* une grandeur signifie en donner une valeur numérique avec deux chiffres significatifs. Dans tout le problème, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ou d'une flèche dans le cas général, le champ de pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre supposé galiléen. Une quantité surmontée d'un point indique la dérivée totale par rapport au temps de cette quantité : $\dot{a} = \frac{da}{dt}$.

I. — Forme des gouttes

Dans toute cette partie, la goutte est supposée au repos. Pour faciliter les calculs correspondants à l'observation O1, on adopte une géométrie différente de la réalité en considérant la goutte cylindrique de rayon a et de hauteur e comme représenté sur la figure 1. Du fait que le contact avec la goutte réelle est ponctuel, on admet que dans le modèle cylindrique, toute la surface du cylindre (y compris sa base) est en contact avec l'air ; cela revient à supposer qu'une mince couche d'air sépare la base du cylindre de la plaque. L'expérience montre que les interactions entre l'eau et l'air sont associées à une énergie potentielle de la forme $E_{p,t} = AS$ où S est l'aire de l'interface eau-air et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle.

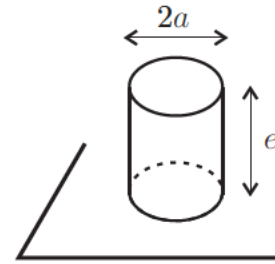


FIGURE 1 – Modèle cylindrique

I.A. — Rôle de la tension superficielle

Dans la partie I.A on néglige la pesanteur.

□ 1 — Exprimer le volume V de la goutte cylindrique et sa surface totale de contact avec l'air S en fonction de a et e . En déduire que son énergie potentielle de tension superficielle se met sous la forme :

$$E_{p,t} = 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a}$$

□ 2 — Déterminer, pour V et A fixés, la valeur a_0 de a pour laquelle $E_{p,t}$ passe par un minimum. On exprimera a_0 en fonction de V . Vérifier que la valeur correspondante de l'épaisseur de la goutte est $e_0 = 2a_0$, ce qui donne une géométrie « proche » de la sphère. En déduire l'expression du minimum de l'énergie potentielle en fonction de A et a_0 , tracer le graphe de $E_{p,t}$ en fonction de a .

□ 3 — Déterminer, pour V et A fixés l'expression de $\left. \frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} \right|_{a=a_0}$ en fonction de A . En déduire qu'au voisinage de $a = a_0$, on peut mettre, à une constante additive près, l'énergie potentielle de tension superficielle sous une forme analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et de longueur a . On exprimera k en fonction de A et ℓ_0 en fonction de a_0 . Calculer k et comparer à la raideur d'un ressort réel qui s'allonge de $\Delta l = 1$ cm lorsqu'on lui suspend une masse $m = 100$ g.

I.B. — Influence de la pesanteur

Dans cette partie on prend en compte la pesanteur. On prend l'origine des énergies potentielles de pesanteur à la base de la goutte de telle sorte que les cotes de ses faces inférieure et supérieure sont respectivement $z = 0$ et $z = e$. On fait l'hypothèse que l'énergie potentielle de pesanteur modifie très peu la valeur a_0 de a qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte. On supposera notamment que la relation entre V et a_0 obtenue à la question 2 reste vraie.

□ 4 — Montrer que, sous ces hypothèses, l'énergie potentielle de pesanteur de la goutte s'écrit

$$E_{p,g} = \frac{2\pi\mu_e g a_0^6}{a^2}$$

□ 5 — On note $a_1 = a_0(1 + \epsilon)$ la valeur qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte. En supposant $\epsilon \ll 1$ et en utilisant un développement limité, déterminer à l'ordre 1 l'expression de ϵ en fonction de a_0 , μ_e , g et A . Interpréter le signe de ϵ . Vérifier a posteriori l'hypothèse $\epsilon \ll 1$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Modèle mécanique du rebond

L'analyse de la partie I conduit à modéliser la tendance d'une goutte à reprendre une forme sphérique par un ressort de raideur k . Pour prendre en compte par ailleurs l'inertie de la goutte et d'inévitables frottements internes, on adopte le modèle de la figure 2 : on attache sous une masse ponctuelle $m = 6,3$ mg un patin (P) plan de masse nulle via un ressort de raideur $k = 2,6$ N.m⁻¹ et de longueur à vide e_0 et un amortisseur qui exerce sur m une force de la forme $\vec{F} = -f \dot{e} \hat{u}_z$ où e est la distance entre la masse m et le patin. Le ressort et l'amortisseur sont montés en parallèle. On néglige la masse du ressort et la masse de l'amortisseur. Dans ce modèle toute la masse de la goutte est concentrée en son sommet, cela sera corrigé dans la partie III.

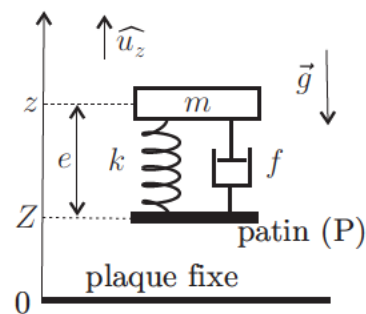


FIGURE 2 — Modèle mécanique de la goutte

À chaque instant t , on repère les mouvements du système par la cote $z(t)$ de la masse m et par la cote $Z(t) = z(t) - e(t)$ du patin (P), la cote nulle étant prise sur la plaque fixe.

II.A. — Étude de la chute

Le système est abandonné avec les conditions initiales $z(t = 0) = h + e_0$, $\dot{z}(t = 0) = 0$, $e(t = 0) = e_0$ et $\dot{e}(t = 0) = 0$. On néglige les forces exercées par l'air.

□ 6 — En isolant le patin, montrer que $e(t)$ reste constamment égal à e_0 .

□ 7 — Justifier par ailleurs que l'évolution de $z(t)$ correspond à une chute libre. En déduire, en fonction de g et h , l'expression du module de la vitesse $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ de la masse m à l'instant t_0 où le patin touche la plaque de cote $z = 0$. Calculer v_0 .

II.B. — Étude du choc sur la plaque

On fixe désormais l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où le patin touche la plaque. Du fait de sa masse nulle, sa vitesse devient instantanément nulle. On repère alors l'évolution de l'épaisseur $e(t)$ avec les conditions initiales $e(t = 0) = e_0$ et $\dot{e}(t = 0) = -v_0$. Dans toute la suite de cette partie on suppose que le poids de la goutte est négligeable devant les autres forces en jeu.

□ 8 — On suppose que le patin reste au contact de la plaque fixe en $z = 0$. Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\varepsilon(t) = e(t) - e_0$ se met sous la forme

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

où l'on explicitera les constantes positives ω_0 et Q en fonction de m , k et f .

□ 9 — On suppose que $Q^2 \gg 1$ et l'on néglige tous les termes en $1/Q^2$. En déduire que la solution générale est de la forme $\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) [B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)]$ et déterminer les constantes d'intégration B et C en fonction de v_0 et ω_0 .

□ 10 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la suite des instants correspondants aux extrema successifs (positifs ou négatifs) de $\varepsilon(t)$. On admet que les oscillations de $\varepsilon(t)$ sont perceptibles tant que leur amplitude $\varepsilon(T_n)$ reste supérieure ou égale à 10% de la valeur initiale $\varepsilon(T_0)$. Exprimer le nombre d'oscillations perceptibles en fonction de Q . Combien peut-on en observer si $Q = 5$? On conservera cette valeur de Q dans toute la suite de cette partie.

II.C. — Décollement de la goutte

On s'intéresse désormais à la possibilité de décollement du patin. On note $\vec{R} = R\hat{u}_z$ l'action de contact exercée par la plaque fixe sur le patin.

□ 11 — Établir l'expression de R en fonction de k , f , ε et $\dot{\varepsilon}$.

□ 12 — En limitant les calculs à l'ordre 1 en $1/Q$, de simples substitutions non demandées donnent alors

$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left\{ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 t) \right\}$$

Déterminer l'instant $\tau > 0$ où le patin décolle. Calculer sa valeur, le modèle est-il en accord avec les observations? Quelle erreur relative commet-on si l'on néglige le terme en $1/Q$ dans l'expression de τ ?

□ 13 — Quelle loi de variation de τ en fonction du paramètre a_0 , étudié dans la partie I, le modèle prévoit-il? Une étude expérimentale menée sur des gouttes de rayon variant entre 0,5 mm et 2 mm a permis de tracer le graphe de la figure 3 en échelle log-log. Tester la validité du modèle.

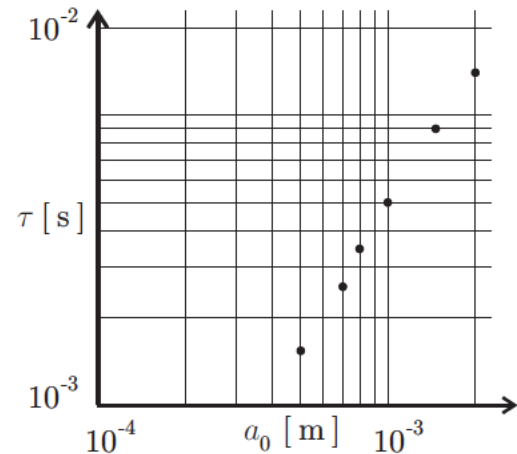


FIGURE 3 — τ fonction de a_0

FIN DE LA PARTIE II

III. — Modèle ondulatoire du rebond

Le modèle de la partie II présente l'inconvénient de concentrer toute la masse de la goutte en son sommet. Par ailleurs les forces de tension superficielle, bien que ne n'existant qu'en surface ont une influence au sein de la goutte par le biais des forces de pression. On adopte donc dans cette partie un modèle plus respectueux du caractère continu du milieu envisagé mais afin d'éviter de lourds calculs on se limite à une géométrie unidimensionnelle et à de faibles déformations. De plus on ne s'intéresse qu'à la phase où la goutte est au contact de la plaque; on néglige donc la pesanteur.

III.A. — Équation d'onde

La goutte est modélisée comme sur la figure 4 par une chaîne de N masses M liées par des ressorts identiques de longueur à vide d_0 et de raideur K . Au repos la masse de numéro (n) est située à la cote nd_0 et on repère son mouvement par sa cote $z_n = nd_0 + \xi_n(t)$.

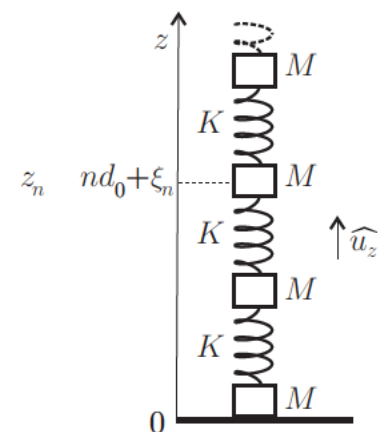


FIGURE 4 — Modèle ondulatoire

□ 14 — En supposant $1 < n < N$, établir l'équation du mouvement de la n -ième masse faisant intervenir les positions $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

□ 15 — On fait l'approximation des milieux continus en introduisant une fonction de deux variables $\xi(z,t)$ telle que $\xi(z = nd_0, t) = \xi_n(t)$ et en considérant de plus que $d_0 \rightarrow 0$ pendant que $N \rightarrow +\infty$. Montrer que $\xi(z,t)$ est solution d'une équation de D'ALEMBERT faisant apparaître une célérité c que l'on exprimera en fonction de K , d_0 et M . Montrer que la force exercée par la partie inférieure de la chaîne sur la partie supérieure s'écrit

$$\vec{F}(z,t) = -K d_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} \hat{u}_z$$

□ 16 — On cherche des solutions de la forme $\xi(z,t) = \xi_M \sin(\alpha z - \varphi) \cos(\omega t - \psi)$ avec $0 \leq \varphi < \pi$ et $0 \leq \psi < \pi$. Établir l'expression de $\alpha > 0$ en fonction de ω et c .

III.B. — Conditions aux limites - Conditions initiales

La chaîne de masses est finie et localisée au repos entre la cote $z = 0$ de la plaque et la cote $z = 2a_0$, de telle sorte que la masse inférieure est à tout instant au contact de la plaque.

□ 17 — Quelle est la condition aux limites imposée par la plaque à la masse inférieure qui est directement posée sur elle? En déduire la valeur de φ .

□ 18 — Justifier le fait que $\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=2a_0} = 0$ à tout instant. En déduire que seule une suite de pulsations ω_i associées à un entier i sont possibles et les exprimer en fonction de i , a_0 et c .

□ 19 — Les conditions initiales $\xi|_{t=0}$ et $\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0}$ sont délicates à mettre en œuvre car au moment où la chaîne touche la plaque, elle est déformée par la pesanteur. On choisit donc comme nouvelle origine la position de la masse inférieure à $t = 0$. Les calculs complets étant hors de portée, on admet que seul le mode fondamental, de pulsation la plus basse, est présent avec $\varphi = 0$, $\psi = 0$ et $\xi_M < 0$. En déduire que la masse inférieure reste au contact de la plaque jusqu'à la date τ que l'on exprimera en fonction de a_0 et c .

III.C. — Retour à la goutte d'eau

Pour faire le lien entre ce modèle et la goutte, il convient d'explicitier c et donc K . On suppose donc qu'il y a $N \gg 1$ masses ponctuelles identiques $M = m/N$ distantes au repos de $d_0 = 2a_0/N$.

□ 20 — Déterminer, en fonction de κ , l'expression de la raideur du ressort obtenu en associant en série deux ressorts de même raideur κ .

□ 21 — En déduire l'expression de la raideur K que doit posséder chaque ressort de la chaîne pour que celle-ci soit équivalente au ressort unique de raideur k de la question 3 modélisant les effets de la tension superficielle. On exprimera K en fonction de A et N .

□ 22 — Exprimer alors le temps de contact τ de la goutte en fonction de A , μ_e et de son rayon a_0 . Calculer τ et comparer avec le résultat de la question 13.

III.D. — Rôle éventuel de la compressibilité de l'eau

On se demande à présent si l'incompressibilité de l'eau peut être remise en cause.

□ 23 — Quel phénomène courant prouve le caractère compressible de l'eau? Comment peut-on mesurer très simplement son coefficient de compressibilité isentropique χ_s avec le matériel d'une salle de travaux pratiques? On ne demande pas un protocole détaillé mais juste le principe de la mesure.

□ 24 — Si on omet l'influence de la tension superficielle et qu'on privilégie le caractère compressible de l'eau, on peut conserver le modèle utilisé dans cette partie à condition de remplacer la célérité c des ondes obtenue à la question 15 par la célérité du son dans l'eau c_e . Calculer dans ce cadre le temps de contact τ de la goutte d'eau sur la plaque et conclure.

FIN DE LA PARTIE III

IV. — Étude des pertes lors du rebond

On se propose dans cette partie de relier le nombre limité de rebonds (observation O3) à la dissipation d'énergie pendant le rebond de la goutte d'eau sur la plaque. Pour cela on étudie d'abord un écoulement plan simple afin d'établir une expression de la puissance dissipée par viscosité dans l'eau.

IV.A. — Puissance dissipée par viscosité dans un écoulement modèle

Dans cette question on envisage l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité η et de masse volumique μ constantes entre deux plaques planes de cotes respectives $z = 0$ et $z = e$. La plaque inférieure est fixe alors que l'on déplace la plaque supérieure à vitesse constante $\vec{U} = U \hat{u}_x$ (voir figure 5). L'épaisseur e étant faible, on néglige la pesanteur. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

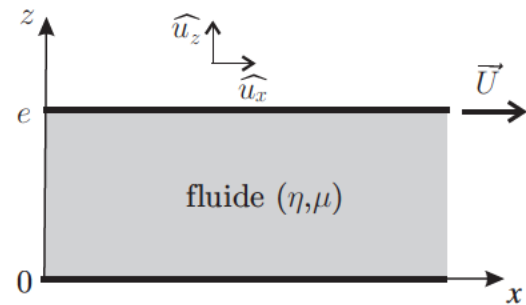


FIGURE 5 – Écoulement modèle

On cherche a priori un champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(x, z) \hat{u}_x$ et un champ de pression de la forme $p = p(z)$

□ 25 — Montrer qu'en fait $\vec{v} = v(z) \hat{u}_x$ et que l'accélération des particules de fluide est nulle.

□ 26 — Montrer que le champ de pression est uniforme et que dans le cas général, v est une fonction affine de z . En considérant les conditions aux limites du problème, exprimer alors v en fonction de z , U et e .

□ 27 — Montrer que la force surfacique exercée par une particule de fluide sur la particule de fluide située sous elle s'écrit $\frac{d\vec{F}}{dS} = f_s \hat{u}_x$ où l'on exprimera f_s en fonction de η , U et e .

□ 28 — En déduire que la puissance des actions de contact reçue par une particule de fluide de volume $d\vartheta = dx dy dz$ de la part de ses voisins s'écrit $d\mathcal{P}_{\text{ext}} = \rho d\vartheta$ où l'on exprimera ρ en fonction de η , U et e . Commenter le signe de \mathcal{P}_{ext} lorsqu'on applique ce résultat à l'ensemble du fluide.

□ 29 — En déduire l'expression de la puissance développée par les forces intérieures à une particule de fluide de volume $d\vartheta = dx dy dz$. Commenter son signe, qu'advient-il de cette puissance ?

IV.B. — Cas de la goutte

On suppose que l'étude la partie IV.A peut être adaptée au cas de la goutte d'eau posée sur la plaque et qui se déforme. On estime que la puissance volumique dissipée par viscosité peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\vartheta} = \eta_e \left(\frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right)^2$$

où $e(t) \approx 2a(t)$ est l'épaisseur de la goutte et $a(t)$ son rayon.

□ **30** — Donner une estimation de $\frac{1}{e} \frac{de}{dt}$ en fonction du temps de contact τ de la goutte. En déduire une expression de l'ordre de grandeur de l'énergie ΔE dissipée par viscosité au sein de la goutte pendant son rebond en fonction de η_e , a_0 et τ .

□ **31** — Soit E l'énergie cinétique de la goutte au moment où elle touche la plaque et où elle n'est pas encore déformée. Exprimer le rapport $E/\Delta E$ en fonction de τ , g , h , μ_e et η_e . En estimant la valeur de ce rapport, indiquer si les pertes pendant le rebond permettent d'interpréter l'observation **O3**.

□ **32** — Calculer en ordre de grandeur le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e correspondant aux oscillations de la goutte. En quoi le modèle de la partie IV.A est-il critiquable? Pour corriger ce modèle, on admet que la viscosité réelle de l'eau doit être remplacée par une viscosité effective $\eta_{\text{eff}} = \eta_e \mathcal{R}_e$. Les pertes pendant le rebond permettent-elles alors d'interpréter l'observation **O3**?

FIN DE LA PARTIE IV

V. — Étude des pertes dans l'air

Pour estimer le nombre maximal de rebonds, on néglige désormais les pertes d'énergie lors du rebond et on se focalise sur les pertes d'énergie lors du déplacement de la goutte dans l'air. Dans cette partie la goutte est supposée sphérique de rayon a_0 . Elle est lancée d'une hauteur h sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Les actions de l'air sur la goutte sont modélisées uniquement par une force de traînée, ce qui suppose notamment que l'on néglige la poussée d'Archimède. De plus, on suppose que cette force de traînée est de la forme $\vec{F} = -\mu_a \pi a_0^2 v \vec{v}$

V.A. — Ordres de grandeurs

On néglige tout d'abord la traînée pour étudier le mouvement de la goutte.

□ **33** — Exprimer la vitesse v de la goutte de rayon a_0 lâchée d'une hauteur h lorsqu'elle passe à la hauteur z au-dessus de la plaque.

□ **34** — Exprimer le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e de la goutte lorsqu'elle se trouve à la hauteur z au-dessus de la plaque en fonction de η_a , μ_a , g , h , a_0 et z . Calculer \mathcal{R}_e après un centimètre de chute et lorsque la goutte atteint la plaque. Commenter le choix adopté par l'énoncé pour l'expression de la force de traînée.

V.B. — Influence de la traînée sur le nombre de rebonds

La résolution analytique de l'équation du mouvement en présence de la traînée ne présentant pas d'intérêt pour évaluer un simple ordre de grandeur du nombre de rebonds, on simplifie davantage le modèle en remplaçant la traînée par sa valeur au moment de l'impact de la goutte sur la plaque, la vitesse de la goutte à cet instant étant estimée en l'absence de traînée.

- 35 — Montrer que cette simplification revient à remplacer le champ de pesanteur g par une valeur effective g_- lorsque la goutte se dirige vers la plaque et g_+ lorsqu'elle s'en éloigne. On écrira $g_{\pm} = g(1 \pm \gamma)$ et l'on exprimera la constante γ en fonction de μ_a , μ_e , h et a_0 . Calculer γ et commenter sa valeur.
- 36 — On note h_n l'altitude de la goutte après n rebonds en identifiant h_0 à la hauteur h de laquelle on lâche la goutte. Exprimer h_n en fonction de h , n et γ .
- 37 — Exprimer un ordre de grandeur du nombre de rebonds maximal N en fonction de μ_e , μ_a , h et a_0 . Calculer N et commenter ce résultat compte-tenu de l'observation O3.

FIN DE LA PARTIE V

Données numériques

- Masse volumique $\left\{ \begin{array}{l} \text{de l'eau : } \mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \\ \text{de l'air : } \mu_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3} \end{array} \right.$
- Viscosité dynamique $\left\{ \begin{array}{l} \text{de l'eau : } \eta_e = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s} \\ \text{de l'air : } \eta_a = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s} \end{array} \right.$
- Célérité du son $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans l'eau : } c_e = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} \\ \text{dans l'air : } c_a = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right.$
- Coefficient de tension superficielle entre l'eau et l'air : $A = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$
- Rayon de la goutte d'eau considérée : $a_0 = 1,0 \text{ mm}$
- Hauteur de laquelle les gouttes sont lâchées : $h = 10 \text{ cm}$.
- Champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE